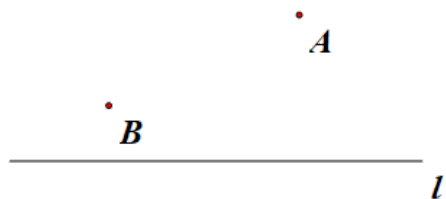


## 第3讲 二次函数之将军饮马、胡不归问题

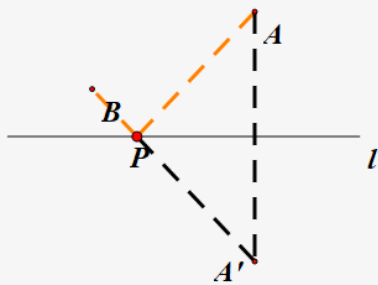
### 一、将军饮马问题

#### 1. 和最小问题

如图，在  $l$  上找一点  $P$ ，使  $PA + PB$  最小。



【备注】作法：作点  $A$  关于  $l$  对称的点  $A'$ ，连接  $A'B$ ，与  $l$  的交点即为点  $P$ 。

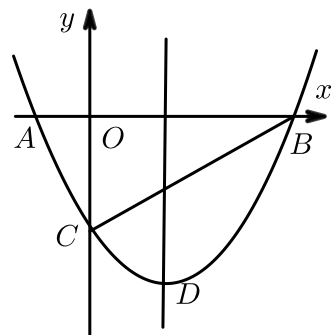


🧠 举个“栗”子

栗子1

1. 2019~2020学年9月天津南开区天津市南开外国语中学初三上学期月考第19题 ★★★★★

如图，抛物线  $y = x^2 + bx - 3$  与  $x$  轴交于  $A, B$  两点，与  $y$  轴交于  $C$  点，且  $A(-1, 0)$ 。



(1) 求抛物线的解析式及顶点  $D$  的坐标。

(2) 点  $M(m, 0)$  是  $x$  轴上的一个动点，当  $MC + MD$  的值最小时，求  $m$  的值。

【答案】(1) 抛物线解析式  $y = x^2 - 2x - 3$ 。顶点  $D$  坐标为  $(1, -4)$ 。

$$(2) m = \frac{3}{7}.$$

【解析】(1) 把  $A(-1, 0)$  代入  $y = x^2 + bx - 3$  中,

$$\text{得 } 1 - b - 3 = 0,$$

$$\text{解得 } b = -2,$$

$$\therefore \text{抛物线解析式 } y = x^2 - 2x - 3.$$

$$\therefore y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4,$$

$$\therefore \text{顶点 } D \text{ 坐标为 } (1, -4).$$

$$(2) y = x^2 - 2x - 3 \text{ 中},$$

$$\text{令 } x = 0 \text{ 得 } y = -3,$$

$$\therefore C \text{ 坐标 } (0, -3),$$

作  $CC_1$  关于  $x$  轴对称,

连接  $C_1D$  交  $x$  轴于  $M$ ,

$\therefore C$ 、 $C_1$  关于  $x$  轴对称,

$$\therefore MC = MC_1,$$

$$\therefore MC + MD = MC_1 + MD = C_1D,$$

此时  $MC + MD$  最小.

$$\therefore C(0, -3),$$

$$\therefore C_1(0, 3),$$

设直线  $C_1D$  解析式  $y = kx + n$ ,

把  $C_1(0, 3)$ ,  $D(1, -4)$  代入  $y = kx + n$  中,

$$\text{得 } \begin{cases} n = 3 \\ k + n = -4 \end{cases},$$

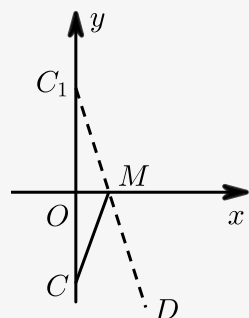
$$\text{解得 } \begin{cases} k = -7 \\ n = 3 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } C_1D \text{ 解析式 } y = -7x + 3.$$

把  $M(m, 0)$  代入  $y = -7x + 3$  中,

$$\text{得 } -7m + 3 = 0,$$

$$m = \frac{3}{7}.$$



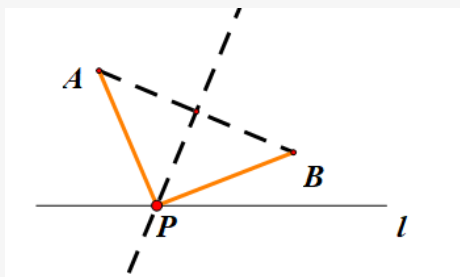
【标注】【知识点】二次函数与动点问题

## 2. 差最值问题

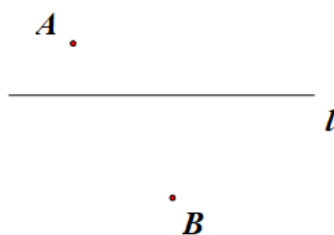
1、如图，在  $l$  上找一点  $P$ ，使  $|PA - PB|$  最小.



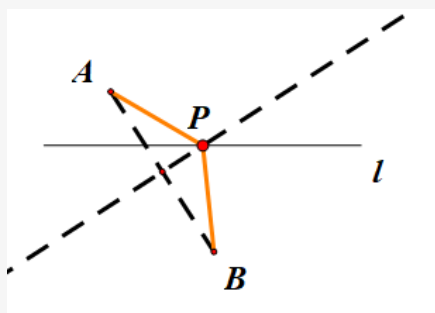
**【备注】**作法：连接  $A$ 、 $B$ ，作线段  $AB$  的垂直平分线，交  $l$  于点  $P$ .



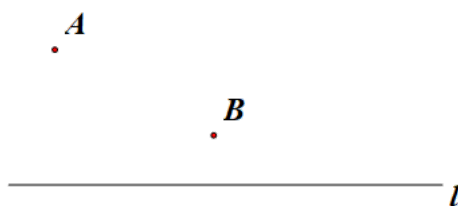
2、如图，在  $l$  上找一点  $P$ ，使  $|PA - PB|$  最小.



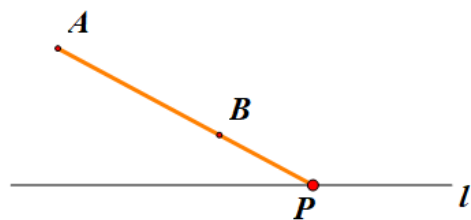
**【备注】**作法：连接  $A$ 、 $B$ ，作线段  $AB$  的垂直平分线，交  $l$  于点  $P$ .



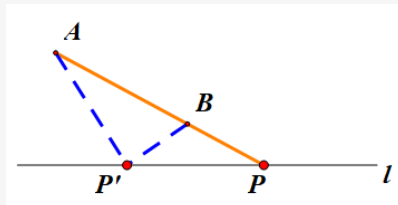
3、如图，在  $l$  上找一点  $P$ ，使  $|PA - PB|$  最大.



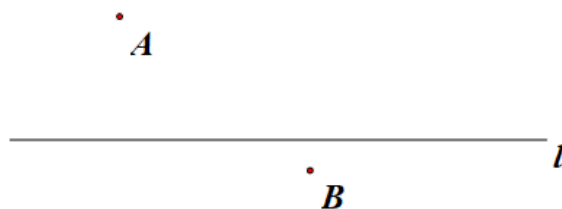
**【备注】**作法：过点  $A$ 、 $B$  作直线  $AB$ ，交  $l$  于点  $P$ .



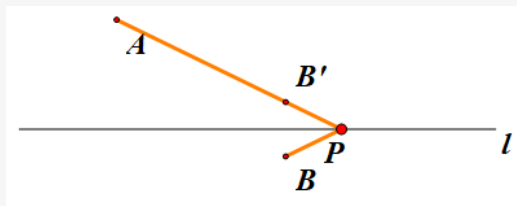
【备注】证明方法： $|PA - PB|_{max} = AB$ ，其他位置点  $P'$ ， $|P'A - P'B| < AB$ 。理由：三角形两边之差小于第三边。



4、如图，在  $l$  上找一点  $P$ ，使  $|PA - PB|$  最大。



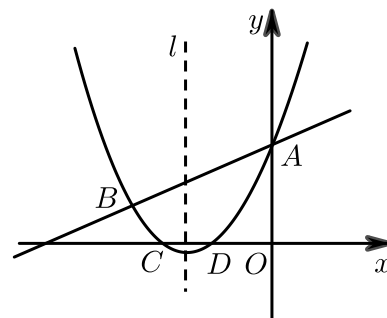
【备注】作法：作点  $B$  关于  $l$  对称的点  $B'$ ，过点  $A$ 、 $B'$  作直线  $AB'$  交  $l$  于点  $P$ 。



栗子2

2. 2018~2019学年天津河北区初三下学期开学考试第24题12分 ★★★★★

如图，抛物线  $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$  与直线  $y = \frac{1}{2}x + 3$  交于  $A$ ， $B$  两点，点  $A$  在  $y$  轴上，抛物线交  $x$  轴于  $C$ ， $D$  两点，已知  $C(-3, 0)$ 。



(1) 求抛物线的解析式。

(2) 在抛物线对称轴  $l$  上找一点  $M$ ，使  $|MB - MD|$  的值最大，请求出点  $M$  的坐标及这个最大值。

**【答案】** (1) 抛物线解析式为  $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3$ .

(2)  $M\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ , 最大值为  $\sqrt{2}$ .

**【解析】** (1)  $\because A$  点为直线  $y = \frac{1}{2}x + 3$  上的点且  $A$  点在  $y$  轴上,

$\therefore A$  点坐标为  $(0, 3)$ ,

又  $\because$  抛物线  $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$  交  $x$  轴于  $C$  点且  $C(-3, 0)$ ,

$\therefore$  将  $A(0, 3)$  与  $C(-3, 0)$  代入  $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$  中得:

$$\begin{cases} \frac{9}{2} - 3b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} b = \frac{5}{2} \\ c = 3 \end{cases},$$

$\therefore$  抛物线解析式为  $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3$ .

(2) 抛物线的对称轴为  $x = -\frac{5}{2}$ ,

由抛物线的对称性可知, 点  $D$  与点  $C$  关于对称轴对称,

$\therefore$  对于  $l$  上任意一点  $M$  都有  $MD = MC$ ,

$\therefore$  当点  $B, C, M$  共线时,  $|MB - MD|$  取最大值, 最大值即为  $BC$  的长.

$$\text{联立方程组 } \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 3 \\ y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \text{ (此为 } A \text{ 点坐标)},$$

$\therefore B(-4, 1)$ ,

$\therefore$  直线  $BC$  解析式为  $y = -x - 3$ ,  $BC = \sqrt{2}$ ,

将  $x = -\frac{5}{2}$  代入  $y = -x - 3$ , 解得  $y = -\frac{1}{2}$ ,

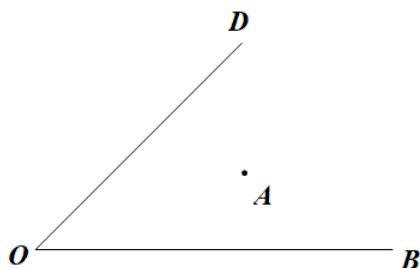
$\therefore M\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ,

$\therefore |MB - MD|$  的最大值为  $\sqrt{2}$ .

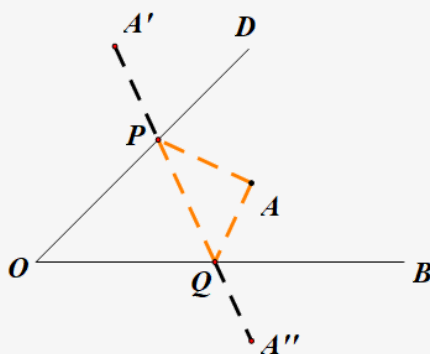
**【标注】**【知识点】二次函数与轴对称问题

### 3. 一定两动类

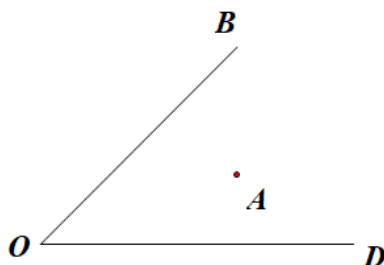
1、如图, 点  $A$  在锐角  $\angle DOB$  的内部, 在  $OD$  边上求作一点  $P$ , 在  $OB$  边上求作一点  $Q$ , 使  $\triangle PAQ$  的周长最小 (或者使得  $PA + QA$  最小).



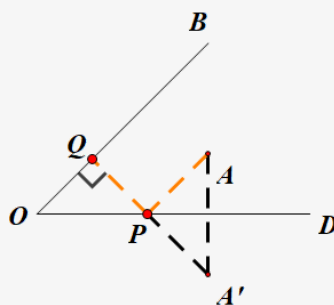
【备注】作法：作点  $A$  关于  $OD$  对称的点  $A'$ ，作点  $A$  关于  $OB$  对称的点  $A''$ ，连接  $A'$ 、 $A''$ ，分别交  $OD$  于点  $P$ ，交  $OB$  于点  $Q$ 。



2、如图，点  $A$  在锐角  $\angle DOB$  的内部，在  $OD$  边上求作一点  $P$ ，在  $OB$  边上求作一点  $Q$ ，使得  $PQ + PA$  最小。



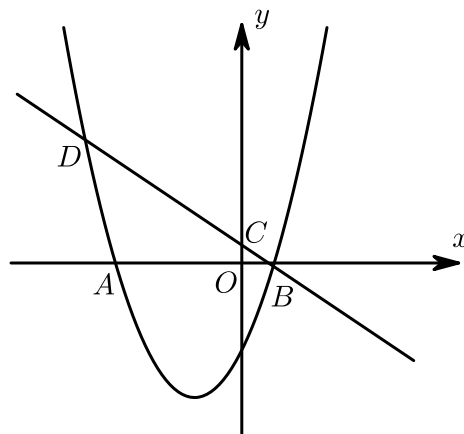
【备注】作法：作点  $A$  关于  $OD$  对称的点  $A'$ ，过点  $A'$  作  $OB$  的垂线段，交  $OB$  于点  $Q$ ，交  $OD$  于点  $P$ 。



栗子3

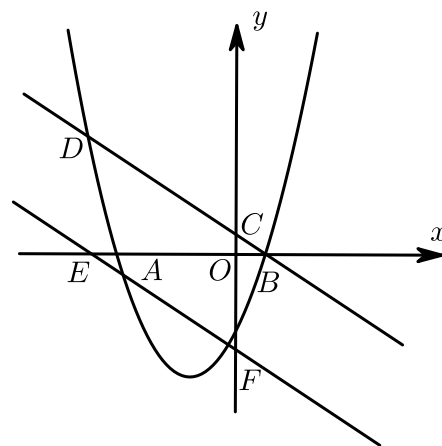
3. ★★★★★

如图，抛物线  $y = ax^2 + 2x + c$  与  $x$  轴交于  $A(-4, 0)$ ， $B(1, 0)$  两点，过点  $B$  的直线  $y = kx + \frac{2}{3}$  分别与  $y$  轴及抛物线交于点  $C$ ， $D$ 。



(1) 求直线和抛物线的表达式.

(2) 如图, 将直线  $BD$  沿  $y$  轴向下平移 4 个单位后, 与  $x$  轴,  $y$  轴分别交于  $E$ ,  $F$  两点, 在抛物线的对称轴上是否存在点  $M$ , 在直线  $EF$  上是否存在点  $N$ , 使  $DM + MN$  的值最小? 若存在, 求出其最小值及点  $M$ ,  $N$  的坐标; 若不存在, 请说明理由.



**【备注】** 可用  $S_{\triangle D'EF}$  等面积法求  $DN$  的长度: 连接  $D'F$  交  $x$  轴于点  $M$ , 则

$S_{\triangle D'EF} = \frac{1}{2} EM (y_{D'} - y_F) = \frac{1}{2} EF \cdot D'N$ ; 然后设  $N$  点坐标, 利用两点间距离公式即可.

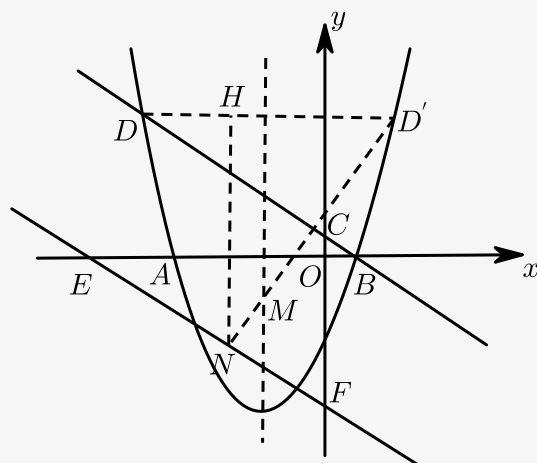
**【答案】** (1)  $y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$ ,  $y = \frac{2}{3}x^2 + 2x - \frac{8}{3}$ .

(2)  $N(-2, -2)$ ,  $M\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right)$ .  $DM + MN$  最小为  $2\sqrt{13}$ .

**【解析】** (1)  $y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$ ,  $y = \frac{2}{3}x^2 + 2x - \frac{8}{3}$ .

(2) 在抛物线上取点  $D$  的对称点  $D'$ , 过点  $D'$  作  $D'N \perp EF$  于点  $N$ , 交抛物线对称轴于点  $M$ , 过点  $N$  作  $NH \perp DD'$  于点  $H$ , 此时,  $DM + MN = D'N$  最小.

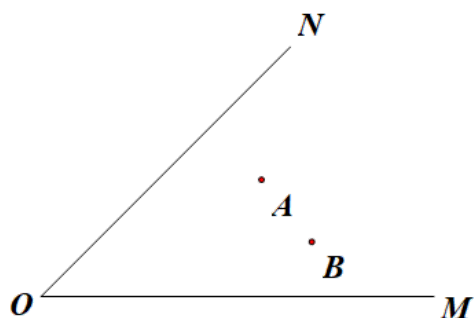
$N(-2, -2)$ ,  $M\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right)$ ,  $DM + MN$  最小为  $2\sqrt{13}$ .



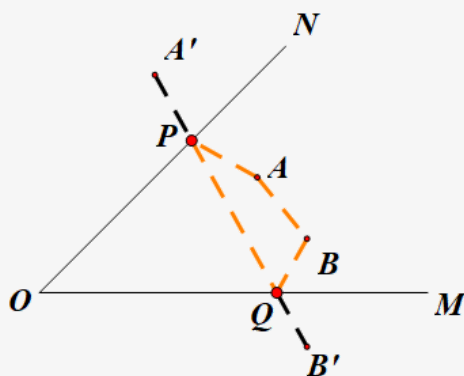
【标注】【知识点】二次函数与轴对称问题

## 4. 两定两动类

如图，点  $A$ 、 $B$  在锐角  $\angle MON$  的内部，在  $ON$  边上求作一点  $P$ ，在  $OM$  边上求作一点  $Q$ ，使四边形  $ABQP$  周长最小（或者使得  $PA + PQ + QB$  最小）。



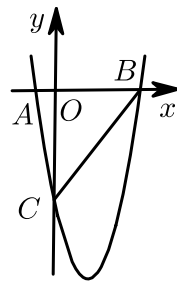
【备注】 作法：作点  $A$  关于  $ON$  对称的点  $A'$ ，作点  $B$  关于  $OM$  对称的点  $B'$ ，连接  $A'$ 、 $B'$ ，分别交  $ON$  于点  $P$ ，交  $OM$  与点  $Q$ 。



栗子4

4. ★★★★★

如图，在平面直角坐标系中，已知抛物线  $y = ax^2 + bx - 5$  与  $x$  轴交于点  $A(-1, 0)$ ， $B(5, 0)$ ，与  $y$  轴交于点  $C$ 。



- (1) 抛物线的函数表达式为 \_\_\_\_\_。
- (2) 若点  $K$  为抛物线的顶点，点  $M(4, m)$  是该抛物线上的一点，在  $x$  轴， $y$  轴上分别找点  $P$ ， $Q$ ，使四边形  $PQKM$  的周长最小，求出点  $P$ ， $Q$  的坐标。

**【答案】** (1)  $y = x^2 - 4x - 5$

(2)  $P\left(\frac{13}{7}, 0\right)$ ， $Q\left(0, -\frac{13}{3}\right)$ 。

**【解析】** (1)  $\because$  点  $A(-1, 0)$ ， $B(5, 0)$  在抛物线  $y = ax^2 + bx - 5$  上，

$$\therefore \begin{cases} a - b - 5 = 0 \\ 25a + 5b - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}$$

$\therefore$  抛物线的表达式为  $y = x^2 - 4x - 5$ 。

(2) 如图， $\because y = x^2 - 4x - 5 = (x - 2)^2 - 9$ ，

$K$  为抛物线的顶点，

$\therefore K(2, -9)$ ，

$\therefore K$  关于  $y$  轴的对称点  $K'(-2, -9)$ 。

$\because M(4, m)$  在抛物线上，

$\therefore M(4, -5)$ ，

$\therefore$  点  $M$  关于  $x$  轴的对称点  $M'(4, 5)$ ，

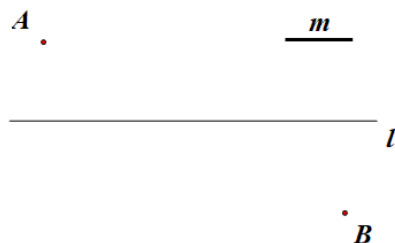
$\therefore$  直线  $K'M'$  的解析式为  $y = \frac{7}{3}x - \frac{13}{3}$ ，

令  $x = 0$ ，则  $y = -\frac{13}{3}$ ，

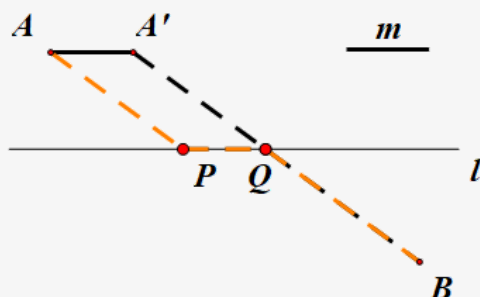
令  $y = 0$ ，则  $x = \frac{13}{7}$ 。

$\therefore P\left(\frac{13}{7}, 0\right)$ ， $Q\left(0, -\frac{13}{3}\right)$ 。

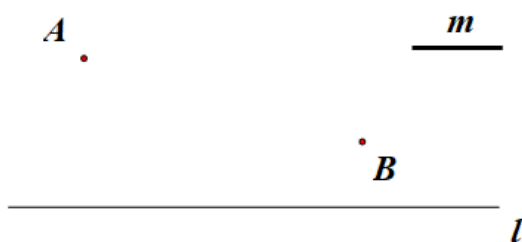




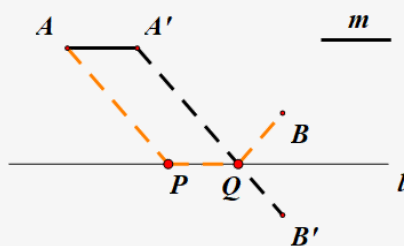
**【备注】**作法：将点  $A$  向右平移  $m$  的长度得到点  $A'$ ；连接  $A'$ 、 $B$ ，交  $l$  于点  $Q$ ，将点  $Q$  向左平移  $m$  的长度，得到点  $P$ 。



3、如图，直线  $l$  外有两点  $A$ 、 $B$ ，有一定长线段  $m$ ，在直线上找到点  $P$ 、 $Q$ ，使得  $PQ$  间的距离等于定长  $m$ ，且使得  $AP + PQ + QB$  最小（或者使得四边形  $APQB$  周长最小）。



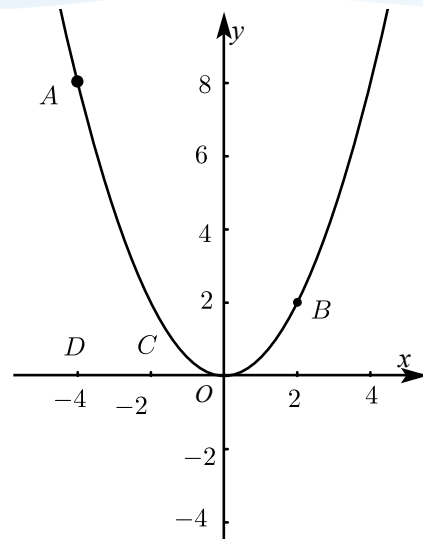
**【备注】**作法：将点  $A$  向右平移  $m$  的长度得到点  $A'$ ，作点  $B$  关于  $l$  的对称点  $B'$ ；连接  $A'$ 、 $B'$ ，交  $l$  于点  $Q$ ，将点  $Q$  向左平移  $m$  的长度，得到点  $P$ 。



栗子5

5. 2018年内蒙古鄂尔多斯东胜区初三中考一模第26题 ★★★★★

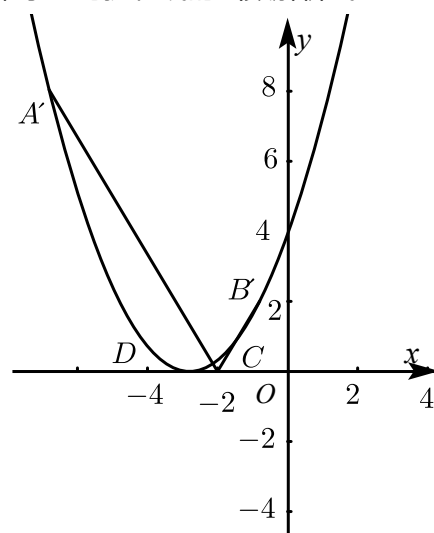
如图，已知点  $A(-4, 8)$  和点  $B(2, n)$  在抛物线  $y = ax^2$  上。



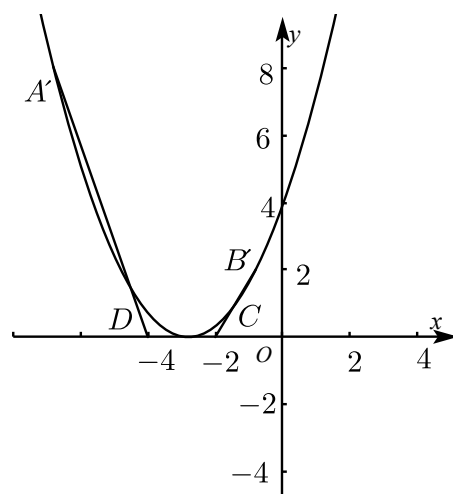
( 1 ) 求  $a$  的值及点  $B$  关于  $x$  轴对称点  $P$  的坐标，并在  $x$  轴上找一点  $Q$ ，使得  $AQ + QB$  最短，求出点  $Q$  的坐标．

( 2 ) 平移抛物线  $y = ax^2$ ，记平移后点  $A$  的对应点为  $A'$ ，点  $B$  的对应点为  $B'$ ，点  $C(-2, 0)$  和点  $D(-4, 0)$  是  $x$  轴上的两个定点．

① 当抛物线向左平移到某个位置时， $A'C + CB'$  最短，求此时抛物线的函数解析式．



② 当抛物线向左或向右平移时，是否存在某个位置，使四边形  $A'B'CD$  的周长最短？若存在，求出此时抛物线的函数解析式；若不存在，请说明理由．



【答案】(1)  $a = \frac{1}{2}$ ;  $P$  的坐标为  $(2, 2)$ ;  $Q\left(\frac{4}{5}, 0\right)$ .

(2) ①  $y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{14}{5}\right)^2$ .

②  $y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{16}{5}\right)^2$ .

【解析】(1) 将点  $A(-4, 8)$  的坐标代入  $y = ax^2$ ,

解得  $a = \frac{1}{2}$ ;

将点  $B(2, n)$  的坐标代入  $y = \frac{1}{2}x^2$ ,

求得点  $B$  的坐标为  $(2, 2)$ ,

则点  $B$  关于  $x$  轴对称点  $P$  的坐标为  $(2, 2)$ ,

直线  $AP$  的解析式是  $y = -\frac{5}{3}x + \frac{4}{3}$ ,

令  $y = 0$ , 得  $x = \frac{4}{5}$ .

即所求点  $Q$  的坐标是  $\left(\frac{4}{5}, 0\right)$ .

(2) ①  $CQ = \left|-2 - \frac{4}{5}\right| = \frac{14}{5}$ ,

故将抛物线  $y = \frac{1}{2}x^2$  向左平移  $\frac{14}{5}$  个单位时,  $A'D + CB'$  最短, 此时抛物线的函

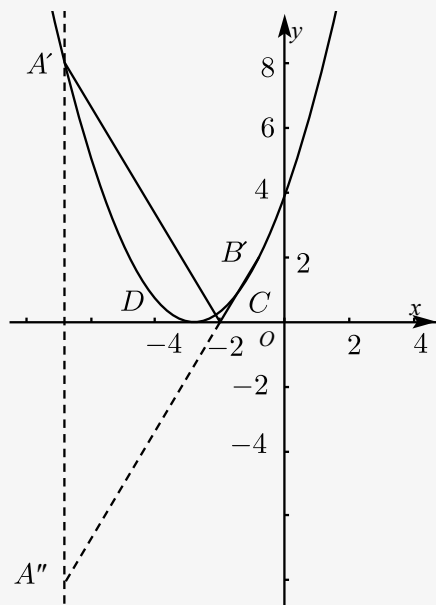
数解析式为  $y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{14}{5}\right)^2$ .

② 左右平移抛物线  $y = \frac{1}{2}x^2$ , 因为线段  $A'B'$  和  $CD$  的长是定值,

所以要使四边形  $A'B'CD$  的周长最短, 只要使  $A'D + CB'$  最短;

第一种情况: 如果将抛物线向右平移, 显然有  $A'D + CB' > AD + CB$ ,

因此不存在某个位置, 使四边形  $A'B'CD$  的周长最短;



第二种情况: 设抛物线向左平移了  $b$  个单位,

则点  $A'$  和点  $B'$  的坐标分别为  $A'(-4-b, 8)$  和  $B'(2-b, 2)$ .

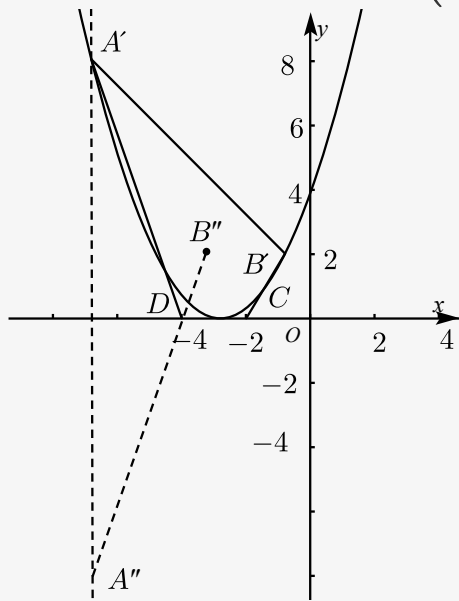
因为  $CD = 2$ , 因此将点  $B'$  向左平移 2 个单位得  $B''(-b, 2)$ ,

要使  $A'D + CB'$  最短, 只要使  $A'D + DB''$  最短,

直线  $A''B''$  的解析式为  $y = \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}b + 2$ .

将点  $D(-4,0)$  代入直线  $A''B''$  的解析式, 解得  $b = \frac{16}{5}$ .

此时抛物线的函数解析式为  $y = \frac{1}{2} \left( x + \frac{16}{5} \right)^2$ .



独步天下1

已知抛物线  $y = ax^2 - 2ax + c$  ( $a, c$  为常数,  $a \neq 0$ ) 经过点  $C(0, -1)$ , 顶点为  $D$ .

(2) 当  $a > 0$  时, 点  $E(0, 1+a)$ , 若  $DE = 2\sqrt{2}DC$ , 求该抛物线的解析式.

$N(m+3, -1)$  是直线  $l$  上的动点. 当  $a$  为何值时,  $FM + DN$  的最小值为  $2\sqrt{10}$ , 并求此时点  $M, N$  的坐标.

( 2 )  $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 1$  或  $y = \frac{3}{2}x^2 - 3x - 1$  .

(3)  $a < -1$ , 点  $M$  的坐标为  $\left(-\frac{7}{6}, 0\right)$ , 点  $N$  的坐标为  $\left(\frac{11}{6}, -1\right)$ .

$$\therefore 0 - 0 + c = -1, \text{ 解得 } c = -1.$$

∴ 抛物线的解析式为  $y = x^2 - 2x - 1$  .

$$\because y = x^2 - 2x - 1 = (x - 1)^2 - 2 ,$$

∴ 抛物线的顶点坐标为  $(1, -2)$  .

( 2 ) 当  $a > 0$  时 ,

由抛物线  $y = ax^2 - 2ax + c$  经过点  $C(0, -1)$  , 可知  $c = -1$  .

∴ 抛物线的解析式为  $y = ax^2 - 2ax - 1$  .

可得抛物线的对称轴为  $x = 1$  .

当  $x = 1$  时 ,  $y = -a - 1$  .

∴ 抛物线的顶点  $D$  的坐标为  $(1, -a - 1)$  .

过点  $D$  作  $DG \perp y$  轴于点  $G$  .

在  $\text{Rt}\triangle DEG$  中 ,  $DG = 1$  ,  $EG = 1 + a - (-a - 1) = 2a + 2$  ,

$$\therefore DE^2 = DG^2 + EG^2 = 1 + (2a + 2)^2 .$$

在  $\text{Rt}\triangle DCG$  中 ,  $DG = 1$  ,  $CG = -1 - (-a - 1) = a$  ,

$$\therefore DC^2 = DG^2 + CG^2 = 1 + a^2 .$$

$$\because DE = 2\sqrt{2}DC , \text{ 即 } DE^2 = 8DC^2 ,$$

$$\therefore 1 + (2a + 2)^2 = 8(1 + a^2) .$$

$$\text{解得 } a_1 = \frac{1}{2} , a_2 = \frac{3}{2} .$$

∴ 抛物线的解析式为  $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 1$  或  $y = \frac{3}{2}x^2 - 3x - 1$  .

( 3 ) 当  $a < -1$  时 ,

将点  $D(1, -a - 1)$  向左平移 3 个单位长度 , 向上平移 1 个单位长度得点  $D'(-2, -a)$

作点  $F$  关于  $x$  轴的对称点  $F'$  , 得点  $F'$  的坐标为  $(0, a - 1)$  ,

当满足条件的点  $M$  落在线段  $F'D'$  上时 ,  $FM + DN$  最小 ,

$$\text{此时 , } FM + DN = F'D' = 2\sqrt{10} .$$

过点  $D'$  作  $D'H \perp y$  轴于点  $H$  .

在  $\text{Rt}\triangle F'D'H$  中 ,  $D'H = 2$  ,  $F'H = -a - (a - 1) = 1 - 2a$  ,

$$\therefore F'D'^2 = F'H^2 + D'H^2 = (1 - 2a)^2 + 4 .$$

$$\text{又 } F'D'^2 = 40 , \text{ 即 } (1 - 2a)^2 + 4 = 40 .$$

$$\text{解得 } a_1 = -\frac{5}{2} , a_2 = \frac{7}{2} \text{ (舍)} .$$

∴ 点  $F'$  的坐标为  $(0, -\frac{7}{2})$  , 点  $D'$  的坐标为  $(-2, \frac{5}{2})$  .

可得直线  $F'D'$  的解析式为  $y = -3x - \frac{7}{2}$  ,

当  $y = 0$  时 ,  $x = -\frac{7}{6}$  ,

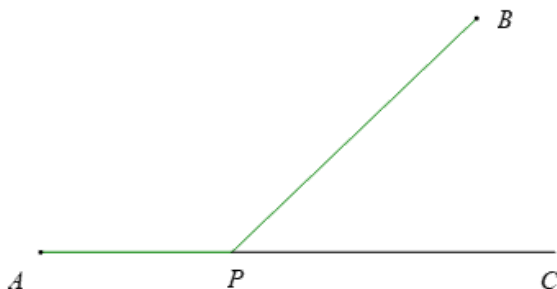
$$\therefore m = -\frac{7}{6} , m + 3 = \frac{11}{6} .$$

∴ 点  $M$  的坐标为  $(-\frac{7}{6}, 0)$  , 点  $N$  的坐标为  $(\frac{11}{6}, -1)$  .

## 二、胡不归问题

**思考：**

在直线  $AC$  上有一个动点  $P$ ，点  $B$  是直线外一点，求  $\frac{1}{2}AP + PB$  的最小值。



**！特点：**

①两定一动：点  $A$ 、 $B$  是两个定点，点  $P$  是一个动点。

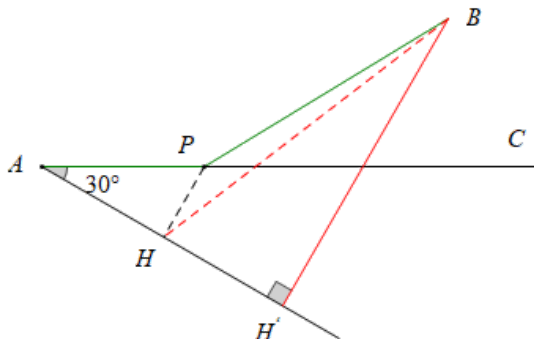
②动点  $P$  在直线  $AC$  上运动。

**【思路点拨】**

我们知道求  $AP + PB$  的最小值可以直接利用两点之间线段最短，但是有系数  $\frac{1}{2}$  存在，就不能直接用两点之间的线段来表示最小值，那么如何解决这个问题呢？

可以利用转化的思想，将  $\frac{1}{2}AP$  转化为一条系数为 1 的线段，就可以解决这个问题。由  $\frac{1}{2}AP$  可以想到含  $30^\circ$  角的直角三角形，于是可以通过构造含  $30^\circ$  角的直角三角形转化线段。

如图构造  $\angle CAH = 30^\circ$ ，过点  $P$  作  $PH \perp AH$  于点  $H$ ，在直角三角形中  $30^\circ$  角所对的直角边等于斜边的一半，则  $\frac{1}{2}AP = PH$ ，所以  $\frac{1}{2}AP + PB = PH + PB$ ，因为  $P$  点是动点，所以点  $H$  也是动点，因此当  $BH \perp AH$  时， $\frac{1}{2}AP + PB$  最小，即  $BH'$ 。

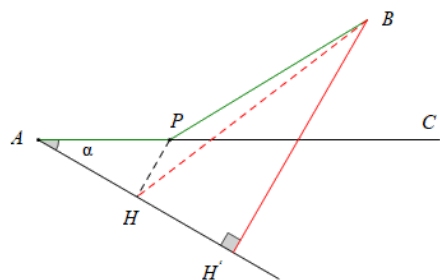


**！总结：**

求“ $PB + nPA$ ”的最小值问题：

构造直角三角形，利用正弦关系转化带系数的线段，即构造  $\sin \alpha = n$ 。

点  $P$  和点  $A$  在同一条直线  $AC$  上，构造的  $\alpha$  角其实就是依托顶点  $A$  及定直线  $AC$  做出来的，即做一条过点  $A$  的射线与定直线  $AC$  所夹锐角为  $\alpha$ 。



**特殊情况：**

如果  $n$  值大于 1，则要先提取  $n$ ，再跟据上述思路进行求解。

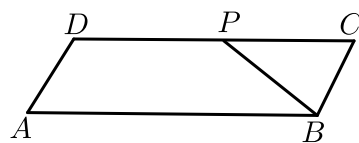
如： $PA + 3PB$  的最小值转化为求  $3\left(\frac{1}{3}PA + PB\right)$

$2PA + 3PB$  的最小值转化为求  $3\left(\frac{2}{3}PA + PB\right)$

栗子6

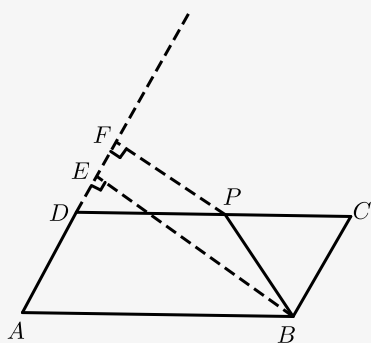
7. 2020年天津南开区初三中考一模第18题3分 ★★★

如图，在平行四边形  $ABCD$  中， $\angle DAB = 60^\circ$ ， $AB = 6$ ， $BC = 2$ ， $P$  为边  $CD$  上的一动点，则  $PB + \frac{\sqrt{3}}{2}PD$  的最小值等于 \_\_\_\_\_。



**【答案】**  $3\sqrt{3}$

**【解析】**



过点  $P$  作  $PF \perp AD$ ，交  $AD$  延长线于点  $F$ ，

过点  $B$  作  $BE \perp AD$ ，交  $AD$  延长线于点  $E$ ，

在  $\text{Rt}\triangle AEB$  中，

$\because \angle DAB = 60^\circ$ ， $AB = 6$ ，

$\therefore AE = AB \cdot \cos \angle DAB = 6 \times \frac{1}{2} = 3$ ，

又  $\because AD = BC = 2$ ，

$$\therefore AE > AD,$$

$\therefore E$  在  $AD$  的延长线上,

在  $Rt\triangle PFD$  中,

$$\therefore \angle PDF = \angle DAB = 60^\circ,$$

$$\therefore PF = PD \cdot \sin \angle PDF = \frac{\sqrt{3}}{2} PD,$$

$$\therefore PB + \frac{\sqrt{3}}{2} PD = PB + PF,$$

易知当  $B$ 、 $P$ 、 $F$  三点共线时  $PB + PF$  取最小值,

$$\text{即 } PB + \frac{\sqrt{3}}{2} PD \text{ 的最小值为 } BF = BA \cdot \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}.$$

故答案为:  $3\sqrt{3}$ .

**【标注】**【知识点】胡不归问题

## 栗子7

### 8. 2021年天津河北区初三中考一模第25题10分 ★★★

已知, 抛物线  $C: y = ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c$  为常数,  $a \neq 0$ ) 的顶点为  $M$ , 与  $y$  轴交于点  $C$ .

(1) 当  $a = -1$  时.

① 抛物线  $C$  经过点  $C(0, 3)$  和  $(4, -5)$ , 求抛物线  $C$  的顶点坐标.

② 抛物线  $C_1$  与抛物线  $C$  关于直线  $x = 3$  对称, 若点  $(1, 0)$ , 点  $(2, 5)$  在抛物线  $C_1$  上, 求抛物线  $C$  的解析式.

(2) 开口向下的抛物线  $C$  经过点  $A(-2, 0)$ ,  $C(0, 2\sqrt{3})$ , 对称轴在  $y$  轴右侧, 交  $x$  轴于点  $Q$ , 点  $P$  为  $y$  轴上一动点, 当  $PQ + \frac{1}{2}CP$  的最小值为  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$  时, 求  $a, b$  的值.

**【备注】** (3) 中,  $\because QE \perp AC$ ,  $\therefore$  这部分也可利用等面积法求出  $AQ$  的长, 即  $QE \cdot AC = CO \cdot AQ$

**【答案】** (1) ①  $(1, 4)$ .

$$\text{② } y = -x^2 + 4x + 5.$$

$$(2) a = -\frac{\sqrt{3}}{4}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**【解析】** (1) ① 当  $a = -1$  时, 抛物线  $C: y = -x^2 + bx + c$ ,

将点  $C(0, 3)$  和点  $(4, -5)$  代入  $y = -x^2 + bx + c$  中,

$$\text{得 } \begin{cases} c = 3 \\ -16 + 4b + c = -5 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\therefore \text{抛物线 } C: y = -x^2 + 2x + 3,$$

$$\therefore \text{抛物线 } C \text{ 的顶点横坐标为: } x = -\frac{2}{-2} = 1,$$

将  $x = 1$  代入  $y = -x^2 + 2x + 3$ ,

得  $y = 4$ ,

$\therefore$  顶点坐标为  $(1, 4)$ .

② 抛物线  $C_1$  与抛物线  $C$  关于  $x = 3$  对称,

点  $(1, 0)$ 、 $(2, 5)$  在抛物线  $C_1$  上,

$\therefore$  点  $(5, 0)$ 、 $(4, 5)$  在抛物线  $C$  上,

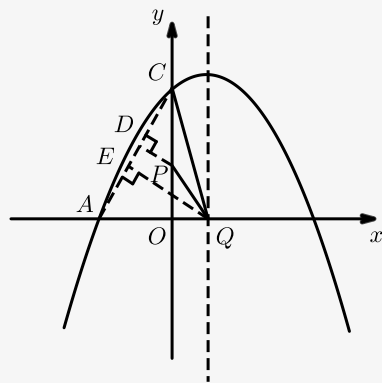
将点  $(5, 0)$ 、 $(4, 5)$  代入到  $y = -x^2 + bx + c$  中,

$$\text{得} \begin{cases} -25 + 5b + c = 0 \\ -16 + 4b + c = 5 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = 4 \\ c = 5 \end{cases},$$

$\therefore$  抛物线  $C$  的解析式为:  $y = -x^2 + 4x + 5$ .

(2) 如图, 连接  $AC$ , 过点  $P$  作  $PD \perp AC$  于点  $D$ ,



过点  $Q$  作  $QE \perp AC$  于点  $E$ ,

由题意知,  $OA = 2$ ,  $OC = 2\sqrt{3}$ ,

在  $\text{Rt}\triangle ACO$  中,  $\tan \angle ACO = \frac{OA}{OC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,

$\therefore \angle ACO = 30^\circ$ ,

$\because PD \perp AC$ ,

$$\therefore PD = \frac{1}{2}CP,$$

$$\therefore PQ + \frac{1}{2}CP = PQ + PD,$$

$\therefore$  当  $PQ + PD$  的值最小时,  $PQ + \frac{1}{2}CP$  的值最小,

当  $Q$ 、 $P$ 、 $D$  在同一直线上, 且与线段  $QE$  重合时,

$PQ + PD$  有最小值,

$$\therefore PQ + \frac{1}{2}CP = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore QE = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$\because \angle ACO = 30^\circ$ ,

$\therefore \angle CAO = 60^\circ$ ,

在  $\text{Rt}\triangle AEQ$  中,  $AQ = \frac{QE}{\sin 60^\circ} = 3$ ,

$\therefore OQ = AQ - OA = 1$ ,

$$\text{由题意即: } -\frac{b}{2a} = 1,$$

$$\therefore b = -2a,$$

$$\therefore y = ax^2 - 2ax + c,$$

将点 A、点 C 的坐标分别代入  $y = ax^2 - 2ax + c$  中,

$$\text{得 } \begin{cases} 0 = 8a + c \\ c = 2\sqrt{3} \end{cases},$$

$$\text{解得 } a = -\frac{\sqrt{3}}{4}, c = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore b = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore a = -\frac{\sqrt{3}}{4}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

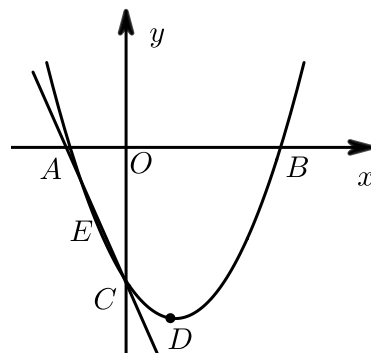
【标注】【知识点】胡不归问题

栗子8

非特殊角类型

9. 2019~2020学年11月天津南开区天津市南开翔宇学校初三上学期月考第25题 ★★★★★

如图, 抛物线  $y = ax^2 - 2ax + c$  的图象经过点  $C(0, -2)$ , 顶点  $D$  的坐标为  $(1, -\frac{8}{3})$ , 与  $x$  轴交于 A、B 两点.



(1) 求抛物线的解析式.

(2) 点  $F(0, y)$  是  $y$  轴上一动点, 当  $y$  为何值时,  $\frac{\sqrt{5}}{5}FC + BF$  的值最小. 并求出这个最小值.

【备注】此题关键在于寻找  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ , 由于不是特殊角因此就要求解题中已知直角三角形中的正弦值

【答案】(1)  $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 2$ .

(2)  $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ .

【解析】(1)  $\because D(1, -\frac{8}{3}), C(0, -2),$   
 $\therefore \begin{cases} c = -2, \\ a - 2a + c = -\frac{8}{3}, \end{cases}$

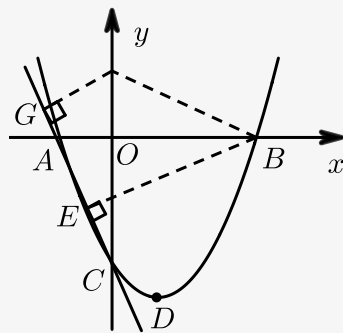
$$\text{解得} \begin{cases} a = \frac{2}{3}, \\ c = -2, \end{cases}$$

$$\therefore \text{抛物线解析式为 } y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 2.$$

(2) 如图, 连接  $BF$ , 过点  $F$  作  $FG \perp AC$  于点  $G$ ,

$$\therefore \sin \angle FCG = \frac{FG}{CF} = \frac{OA}{AC} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore FG = CF \cdot \sin \angle FCG = \frac{\sqrt{5}}{5}CF,$$



$$\therefore \frac{\sqrt{5}}{5}CF + BF = FG + BF \geq BE,$$

当折线段  $BFG$  与  $BE$  重合时, 取得最小值.

由 (2) 可知  $\angle ABE = \angle ACO$ ,

$$\therefore BE = AB \cdot \cos \angle ABE = AB \cdot \cos \angle ACO = 4 \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

$$|y| = OB \cdot \tan \angle ABE = OB \cdot \tan \angle ACO = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{当 } y = -\frac{3}{2} \text{ 时, } \frac{\sqrt{5}}{5}CF + BF \text{ 有最小值为 } \frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

**【标注】**【知识点】二次函数与动点问题

独步天下2

**系数大于 1 型**

#### 10. 2019年天津中考真题第25题10分 ★★★

已知抛物线  $y = x^2 - bx + c$  ( $b, c$  为常数,  $b > 0$ ) 经过点  $A(-1, 0)$ , 点  $M(m, 0)$  是  $x$  轴正半轴上的点.

(1) 当  $b = 2$  时, 求抛物线的顶点坐标.

(2) 点  $D(b, y_D)$  在抛物线上, 当  $AM = AD$ ,  $m = 5$  时, 求  $b$  的值.

(3) 点  $Q\left(b + \frac{1}{2}, y_Q\right)$  在抛物线上, 当  $\sqrt{2}AM + 2QM$  的最小值为  $\frac{33\sqrt{2}}{4}$  时, 求  $b$  的值.

**【答案】** (1)  $(1, -4)$ .

(2)  $b = 3\sqrt{2} - 1$ .

(3)  $b = 4$ .

【解析】(1)  $\because$  抛物线  $y = x^2 - bx + c$  经过点  $A(-1, 0)$ ,

$$\therefore 1 + b + c = 0, \text{ 即 } c = -b - 1,$$

$$\text{当 } b = 2 \text{ 时, } y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4,$$

$\therefore$  抛物线的顶点坐标为  $(1, -4)$ .

(2) 由(1)知, 抛物线的解析式为  $y = x^2 - bx - b - 1$ ,

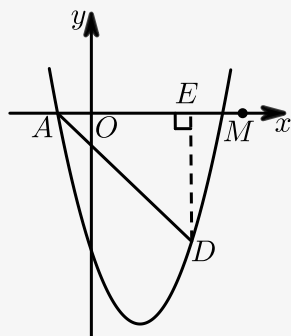
$\because$  点  $D(b, y_D)$  在抛物线  $y = x^2 - bx - b - 1$  上,

$$\therefore y_D = b^2 - b \cdot b - b - 1 = -b - 1,$$

$$\text{由 } b > 0, \text{ 得 } b > \frac{b}{2} > 0, -b - 1 < 0,$$

$\therefore$  点  $D(b, -b - 1)$  在第四象限, 且在抛物线对称轴  $x = \frac{b}{2}$  的右侧,

如图, 过点  $D$  作  $DE \perp x$  轴, 垂足为  $E$ , 则点  $E(b, 0)$ ,



$$\therefore AE = b + 1, DE = b + 1, \text{ 得 } AE = DE,$$

$\therefore$  在  $\text{Rt}\triangle ADE$  中,  $\angle ADE = \angle DAE = 45^\circ$ ,

$$\therefore AD = \sqrt{2}AE,$$

由已知  $AM = AD$ ,  $m = 5$ ,

$$\therefore 5 - (-1) = \sqrt{2}(b + 1),$$

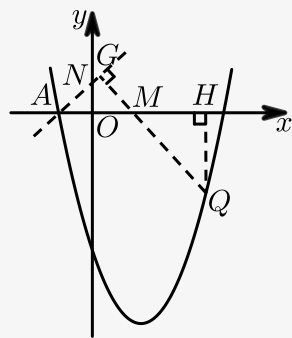
$$\therefore b = 3\sqrt{2} - 1.$$

(3)  $\because$  点  $Q\left(b + \frac{1}{2}, y_Q\right)$  在抛物线  $y = x^2 - bx - b - 1$  上,

$$\therefore y_Q = \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 - b\left(b + \frac{1}{2}\right) - b - 1 = -\frac{b}{2} - \frac{3}{4},$$

可知点  $Q\left(b + \frac{1}{2}, -\frac{b}{2} - \frac{3}{4}\right)$  在第四象限, 且在直线  $x = b$  右侧,

考虑到  $\sqrt{2}AM + 2QM = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}AM + QM\right)$ , 可取点  $N(0, 1)$ ,



如图, 过点  $Q$  作直线  $AN$  的垂线, 垂足为  $G$ ,  $QG$  与  $x$  轴交于点  $M$ ,

有  $\angle GAM = 45^\circ$  , 得  $\frac{\sqrt{2}}{2}AM = GM$  ,

则此时点  $M$  满足题意 ,

过点  $Q$  作  $QH \perp x$  轴于点  $H$  , 则点  $H \left( b + \frac{1}{2}, 0 \right)$  ,

在  $\text{Rt}\triangle MQH$  中 , 可知  $\angle QMH = \angle MQH = 45^\circ$  ,

$\therefore QH = MH$  ,  $QM = \sqrt{2}MH$  ,

$\because$  点  $M(m, 0)$  ,

$\therefore 0 - \left( -\frac{b}{2} - \frac{3}{4} \right) = \left( b + \frac{1}{2} \right) - m$  ,

解得  $m = \frac{b}{2} - \frac{1}{4}$  ,

$\therefore \sqrt{2}AM + 2QM = \frac{33\sqrt{2}}{4}$  ,

$\therefore \sqrt{2} \left[ \left( \frac{b}{2} - \frac{1}{4} \right) - (-1) \right] + 2\sqrt{2} \left[ \left( b + \frac{1}{2} \right) - \left( \frac{b}{2} - \frac{1}{4} \right) \right] = \frac{33\sqrt{2}}{4}$  ,

$\therefore b = 4$  .

**【标注】**【知识点】二次函数与动点问题